SCHEMA RIASSUNTIVO -1-

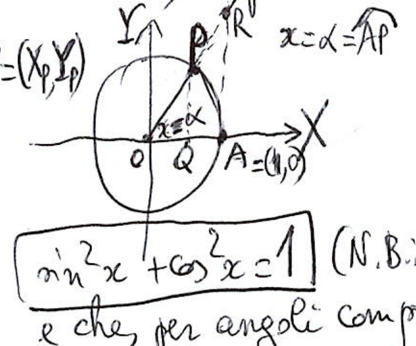
E RIEPILOGO GENERALE (NEW)

AGGIORNATO!

Ovviamente, gli argomenti dei programmi delle parti 1, 2, 3 e 4 vanno fatti tutti. ALLENARSI MOLTO BENE SUI RISPETTIVI ESERCIZIARI DI ISPIRAZIONE E SU QUELLE COSE NON ESPLICITAMENTE FATTE A LEZIONE (CIÒ VIENE LASCIATO A CASA COME ESERCIZIO E COSTITUISCE — PER COSÌ DIRE — DEL MATERIALE CHE VA CONSIDERATO COME SE FOSSE SULL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE RELATIVO: ad eccezione (casomai) delle parti dichiarate "facoltative"). RIPASSARE TUTTO IL PRECORSO!!

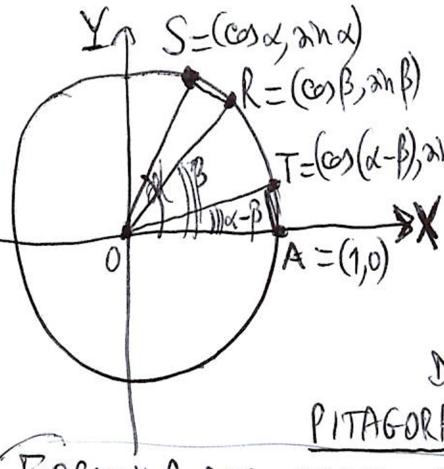
N.B.: IL PRECORSO COINCIDE ESATTAMENTE CON LA PARTE 1, E ANCHE LA PARTE COSIDDETTA "OFA" COINCIDE ESATTAMENTE CON LA PARTE 1. STUDIARE SULLE VERSIONI AGGIORNATE e non su quelle vecchie!!

Naturalmente bisogna sapere molto bene tutti i vari tipi di (dis)equazioni (che rivestono anche importanza fondamentale nello studio di funzione!): 1° grado, 2° grado, fratte, con il valore assoluto, esponenziali, logaritmiche, ..., e in particolare le (DIS)EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE:



Sostituire $X=\cos x$, $Y=\sin x$ e tenere conto che $X^2+Y^2=1$ (equazione della circonferenza goniometrica), vale a dire

$\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1}$ (N.B.: Qui x è l'angolo, che si può indicare anche con α e che, per angoli compresi tra 0 e 2π, corrisponde alla lunghezza dell'arco orientato $\widehat{AP}$ da A a P, ove $A=(1,0)$). N.B.: $\cos\alpha=X_P=\overline{OQ}$, $\sin\alpha=Y_P=\overline{QP}$, $tg\,\alpha$ (dove ha senso) $=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ $=\frac{Y_P}{X_P}=m=$ coefficiente angolare della retta OP.

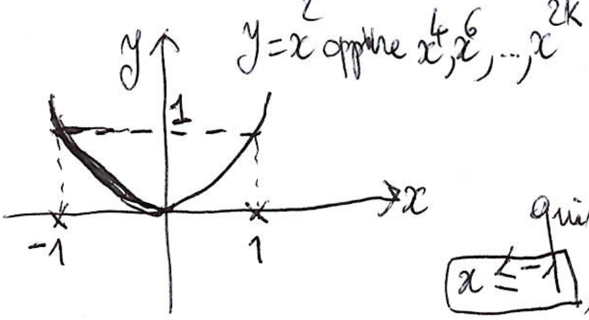


FORMULE FONDAMENTALI

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ E SIMILI

Si usa l'uguaglianza dei triangoli OSR ed OAT e quindi l'uguaglianza $\overline{AT}=\overline{RS}$, vale a dire $\overline{AT}^2=\overline{RS}^2$, e la DISTANZA TRA DUE PUNTI (VEDI TEOREMA DI PITAGORA, con cui si prova anche $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$)

FORMULA DEL CAMBIO DI BASE nei LOGARITMI!!



ATTENZIONE! PER EVITARE ERRORI! Si ha: $x^2 \geq 1$ per "valori esterni alle radici" del polinomio x^2-1; quindi $x^2-1 \geq 0$ se e solo se $\boxed{x \geq 1}$ oppure $\boxed{x \leq -1}$, cioè $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

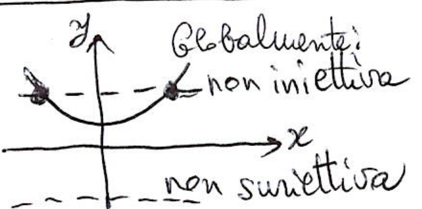
Sarebbe un grave errore dedurre solamente $x \geq 1$ oppure, peggio, $x \geq \pm 1$ (!) Inoltre, $x^2 \leq 1$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$.

Analogamente, quando si studia la disequazione $x^{2k} \geq 1$ con $k \in \mathbb{N}$ (quindi una potenza PARI), si può vedere GRAFICAMENTE che $x^{2k} \geq 1$ se e solo se $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$; $x^{2k} \leq 1$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$.

GEOMETRIA ANALITICA: RETTE E COLLEGAMENTI PROFONDI CON LA TRIGONOMETRIA (equazione della retta, condizioni di parallelismo e di perpendicolarità); distanza punto-punto (ripassare il teorema di Pitagora!); equazione del fascio di rette passanti per un punto.

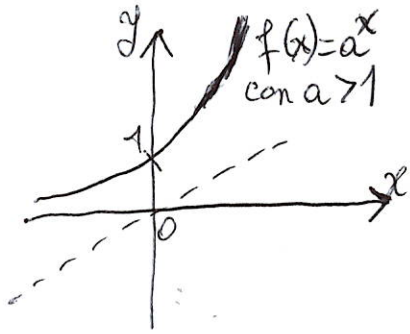
EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA COME LUOGO GEOMETRICO ED ESERCIZI RELATIVI.

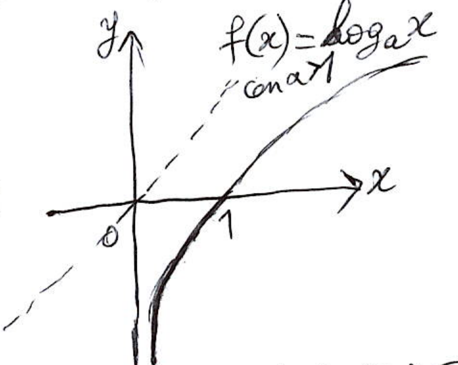
EQUAZIONE DELLA PARABOLA COME LUOGO GEOMETRICO E COME studio della funzione $y = ax^2+bx+c$; COLLEGAMENTI MOLTO PROFONDI ED ESERCIZI VARI, considerando: geometria analitica; iniettività, suriettività e non; funzioni (pseudo)inverse; codominio calcolato "a mano" (risolvere l'equazione $ax^2+bx+c-y=0$ come se y fosse una costante e stimare la y in base alla "limitazione" fornita dalla radice quadrata) e calcolato anche graficamente con il TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, e COLLEGAMENTO MOLTO PROFONDO CON L'ORDINATA DEL VERTICE DELLA PARABOLA.



INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ GLOBALE E LOCALE. Se $f: A \longrightarrow B$ è tale che $B = f(A)$ (cioè il codominio di f), allora f è AUTOMATICAMENTE SURIETTIVA. Vale per ogni f del mondo!

Ripassare i grafici delle funzioni "elementari" (potenza, radice, esponenziale, logaritmo) sia come studio di funzione (PER ESERCIZIO!) sia per come "nascono", in "collegamento", anche con le funzioni INVERSE. RIPASSARE COME NASCE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA (che mantiene la continuità e la stretta crescenza (o la stretta decrescenza), e che fa "scambiare" il dominio con il codominio.





Si noti che, se $a>1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; in particolare, essendo $e \simeq 2.718 > 1$, si ha $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, cioè, in breve

$$\boxed{e^{-\infty} = 0}$$

È $\boxed{0}$, non è né $+\infty$ né $-\infty$! IMPORTANTISSIMO, PER EVITARE ERRORI!!!

Studio delle funzioni TRIGONOMETRICHE: GUARDARE LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA!!!

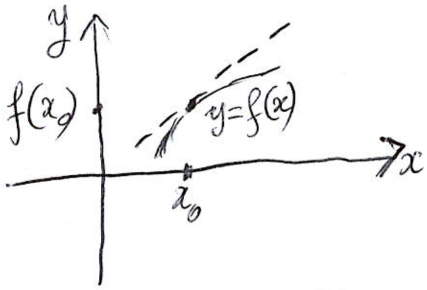
Definizione intuitiva e geometrica di limite.

Ripassare l'algebra dei limiti, che deriva dai limiti della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$

Continuità (ripassare!)

Definizione analitica di derivata e significato geometrico (e "fisico")

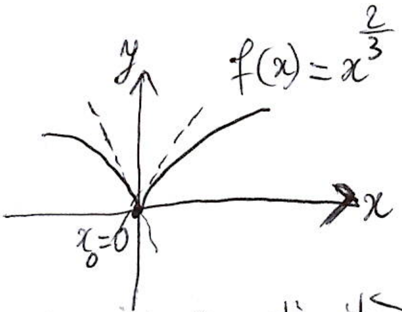
$\lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste in $\mathbb{R}$; $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste in $\mathbb{R}$.



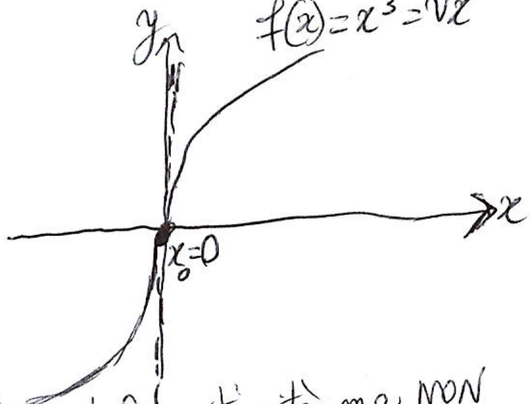
Derivabilità in x_0: se e solo se esiste (ed è unica, e NON VERTICALE) la RETTA TANGENTE alla curva $y=f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$, la cui equazione è $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)}$

La derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente.

<u>Derivabilità implica continuità</u> (cioè, detto in modo "semplice", ogni funzione derivabile in x_0 è continua in x_0), ma <u>il viceversa non è vero</u>: cioè, in generale, continuità non implica derivabilità, vale a dire esistono funzioni continue in x_0 e <u>NON</u> derivabili in x_0 (vedi figure) (come però esistono anche funzioni continue in x_0 e derivabili in x_0)



Nel punto 0, continuità ma non derivabilità (<u>DUE</u> semirette tangenti e <u>NON</u> <u>UNA</u> retta tangente)



Nel punto 0, continuità ma <u>NON</u> derivabilità (la retta tangente è <u>VERTICALE</u> e coincide con l'asse delle y, cioè con la retta $x=0$).

LIMITI

Limiti delle funzioni "elementari" (ci si può aiutare GUARDANDO I GRAFICI) e <u>LIMITI NOTEVOLI.</u>

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI (quando $x \to \pm\infty$)

$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$ <u>REGOLA DI DE L'HÔPITAL</u>: si fa <u>IL QUOZIENTE DELLE DERIVATE</u>, e <u>NON</u> la derivata del quoziente! Detto in modo "semplice": l'esponenziale "vince sempre"; il logaritmo "perde sempre".

Esempio: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ (Hôpital) $= \lim_{x\to+\infty} \frac{D(e^x)}{D(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$

DERIVATE NOTEVOLI - REGOLE DI DERIVAZIONE

Derivata del <u>seno</u> e del <u>coseno</u> con la "tecnica degli h":

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ e <u>formule</u> <u>su</u> <u>cui</u> <u>poggia</u> la trigonometria!

Derivata di tangente e cotangente come derivate di <u>quozienti</u> (<u>non</u> è de l'Hôpital!!) Derivazione delle funzioni inverse (per esempio, derivata dell'<u>arcotangente</u> come funzione inversa della <u>tangente</u>; quindi FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE!!)

Detto in modo "semplice":

a) "LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA È IL RECIPROCO DELLA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI PARTENZA"

b) "LA DERIVATA DELLE FUNZIONI COMPOSTE È IL PRODOTTO DELLE DERIVATE"

Esempi: a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; sia $y = \operatorname{arctg} x$: allora $x = \operatorname{tg} y$, $D(\operatorname{tg} y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, quindi $\boxed{D(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{\cancel{1}}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{1} = \boxed{\cos^2 y}$. Ma ora dobbiamo "ritornare" alla variabile x, quindi nell'espressione di $D(\operatorname{arctg} x)$ ci deve essere qualcosa che contiene espressioni <u>solo</u> della <u>tangente</u> di y e non del coseno di y. Allora (TRUCCO!) usiamo

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

e dividiamo per $\cos^2 y$, perché vogliamo <u>LA TANGENTE</u> (al quadrato), perché $\frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} y$ e vogliamo la x (!) per l'appunto, $\boxed{x = \operatorname{tg} y}$

Quindi $\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$, cioè $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$, da cui, passando ai reciproci, si ottiene $\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$, e quindi, poiché $\boxed{x = \operatorname{tg} y}$, "tornando" alla variabile x, si ha

$$\boxed{D(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

b) $g(x) = \sin(x^2+5x+6)$: si tratta di una funzione composta da due funzioni: la funzione "interna" è $w(x) = x^2+5x+6$, mentre la funzione "esterna" è $\cancel{f}(w) = \sin w$ (usiamo direttamente w, in quanto l'espressione x^2+5x+6 l'abbiamo chiamata w). Ma allora

$$g'(x) = D(\sin w(x)) \cdot D(w(x)) = D(\sin w)_{|w=w(x)} \cdot D(w(x)) = \cos w \cdot (2x+5) =$$

(dobbiamo "ritornare" anche qui alla variabile x (!))

$$= \cos(w(x)) \cdot (2x+5) = [\cos(x^2+5x+6)] \cdot (2x+5)$$

Studio di funzione. Cosa si fa per determinare il GRAFICO?
— DOMINIO o campo di esistenza (Dom f)
— Segno della funzione e intersezioni con gli assi coordinati
— ASINTOTI: orizzontali, verticali, obliqui

N.B.: GUARDARE IL CAMPO DI ESISTENZA (scriviamolo come ∪ di intervalli o semirette)(∪ disgiunta) !!!! Se, ad esempio, $\mathrm{Dom}\, f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ si dovrà studiare:

— $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ per la ricerca degli asintoti VERTICALI;

— $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ per la ricerca degli asintoti ORIZZONTALI,

e se da un lato (per esempio, $+\infty$) non ci sono asintoti orizzontali, allora si cercano gli asintoti obliqui DA QUELLO STESSO LATO (nel nostro caso, $+\infty$; analogo è il caso $-\infty$). Ora, scriviamo solo $x \to +\infty$, perché analogamente si procede quando $x \to -\infty$.

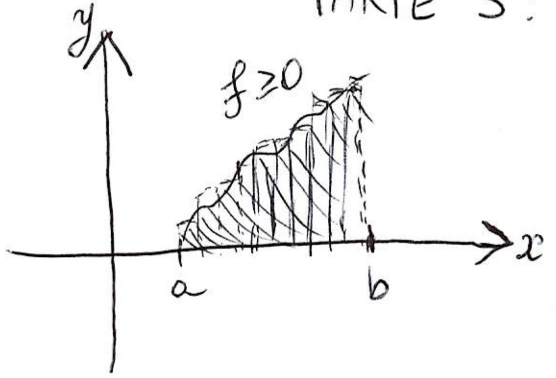
Asintoti obliqui: $\boxed{y = mx + q}$ Si cerca dapprima $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Se $m = +\infty$, oppure $m = -\infty$, oppure $\boxed{m = 0}$, oppure m non esiste, allora possiamo dire già che L'ASINTOTO OBLIQUO (dal lato $+\infty$) NON C'È. Altrimenti (cioè – l'unico caso che rimane – se m è un numero reale diverso da 0) non possiamo ancora dire nulla, e passiamo a calcolare $q = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - m\cdot x)$. Se q è un numero reale (anche 0), allora la retta $\boxed{y = mx + q}$ è asintoto obliquo; altrimenti (cioè: se $q = +\infty$, oppure $q = -\infty$, oppure q non esiste) l'asintoto obliquo non c'è. Notiamo che $m = 0$ è un caso "cattivo", mentre $\boxed{q = 0}$ è un caso "buono".

N.B.: Ricordiamo che una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ e continua su tutto $\mathbb{R}$ NON HA ASINTOTI VERTICALI.

— DERIVATA (PRIMA): Segno della derivata: crescenza, decrescenza, punti di MASSIMO e di MINIMO

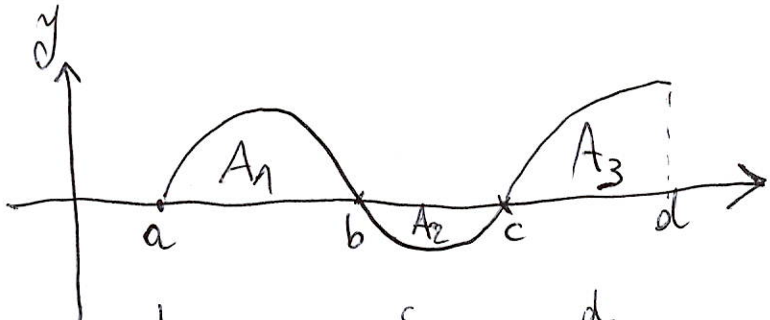
— DERIVATA SECONDA (cioè: derivata della derivata (prima)) e segno: convessità o concavità verso l'alto (∪), concavità o concavità verso il basso (∩), FLESSI (cambio di concavità), ma NEI PUNTI DI FLESSO LA FUNZIONE DEV'ESSERE DEFINITA !!!

PARTE 3: INTEGRALI



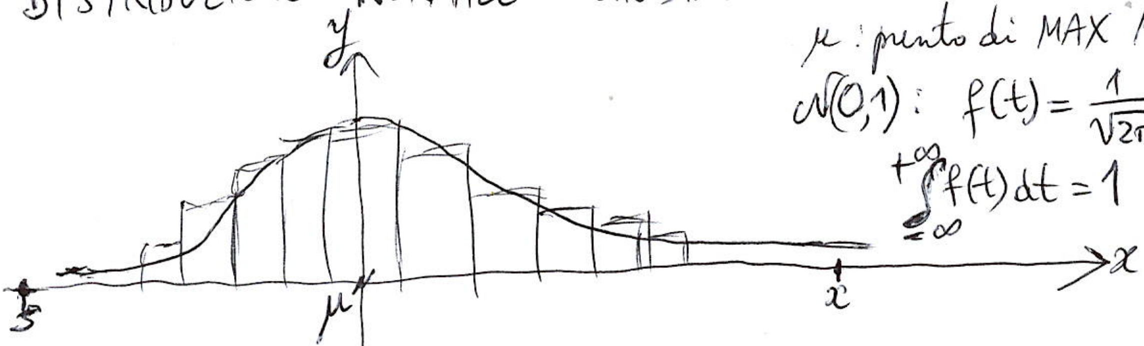
Integrale DEFINITO o alla RIEMANN visto come limite di somme di aree di rettangolini

$$(R)\int_a^b f(t)\,dt$$



$$\int_a^d f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA



μ: punto di MAX ASSOLUTO

$\mathcal{N}(0,1)$: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

Nell' esempio del tiro al bersaglio (e anche in altri esempi analoghi) l' istogramma, "andando all' infinito", "tende" a diventare la campana di Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

σ^2: Varianza: quanto i dati si discostano dal valor medio

campana stretta σ^2 piccolo

campana larga σ^2 grande

N.B.: Si prende $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, perché con l'integrale alla Riemann bisognerebbe fissare gli estremi a, b; ma a, b corrispondono a una limitazione inferiore e superiore dei dati statistici <u>del problema</u>, e noi invece vogliamo un integrale <u>INDIPENDENTE</u> dal problema studiato!

N.B.: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$ (se <u>esiste in $\mathbb{R}$</u>)

$$\boxed{\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt \overset{def}{=} \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 f(t)\,dt}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt}$$

RIEPILOGO GENERALE: PARTE 3

INTEGRALE DEFINITO O ALLA RIEMANN: COSTRUZIONE "CON I RETTANGOLINI". Significato geometrico dell'integrale alla Riemann (area della figura "sottesa", con segno: nel senso che, negli intervalli dove la nostra funzione (integrabile alla Riemann) è negativa, allora l'area va presa cambiata di segno, perché in tal caso l'integrale viene negativo mentre l'area è una GRANDEZZA GEOMETRICA, che viene sempre definita POSITIVA; vedi primissime pagine di "Parte 3, testo adottato").

INTEGRALE INDEFINITO O ALLA NEWTON: LA CLASSE DELLE PRIMITIVE O ANTIDERIVATE.

TEOREMA DI TORRICELLI-BARROW e FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: COLLEGAMENTO PROFONDO tra L'INTEGRALE ALLA NEWTON E QUELLO ALLA RIEMANN. A causa di ciò, è sufficiente considerare il seguente

SCHEMA DEL CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI O ALLA NEWTON

Prima di tutto, si vede se è un integrale immediato (se rientra nella tabellina apposita).

Se il numeratore è la derivata del denominatore, allora l'integrale indefinito è il logaritmo del valore assoluto del denominatore +c .

Se il numeratore è la derivata del denominatore a meno di una costante moltiplicativa, allora si può "aggiustare" la costante in modo tale da ricondursi al caso precedente.

Se compare una funzione w(x) "dentro" un'altra funzione (diciamo psi(w) o equivalentemente phi'(w), ove phi' è la derivata di una certa funzione phi) e il tutto viene MOLTIPLICATO per la derivata di w(x), allora si applica la formula degli integrali QUASI IMMEDIATI, che deriva dalla formula di derivazione delle funzioni COMPOSTE.

Se è l'integrale del prodotto di due funzioni, oppure se è l'integrale di una funzione DA SOLA che NON compare nella tabellina degli integrali immediati (per esempio il logaritmo o l'arcotangente), allora molto spesso conviene usare la formula di integrazione PER PARTI. (n.b.: L'INTEGRALE DEL PRODOTTO NON E' IL PRODOTTO DEGLI INTEGRALI)

Se con tutti i metodi or ora illustrati il calcolo dell'integrale è ancora molto difficile, o "non si vede una strada percorribile", allora si può procedere PER SOSTITUZIONE. Alcune sostituzioni che ricorrono frequentemente sono: radice quadrata di x=w, ed e^x=w.

GLI INTEGRALI QUASI IMMEDIATI SI POSSONO CALCOLARE ANCHE PER SOSTITUZIONE (COLLEGAMENTO PROFONDO).

SCHEMA DEL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI O ALLA RIEMANN, E DI QUELLI GENERALIZZATI O IMPROPRI (che sono limiti di opportuni integrali alla Riemann).

Si applica lo SCHEMA DEL CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI O ALLA NEWTON di cui al passo precedente + la FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE.

APPLICAZIONI IN PROBABILITA' E STATISTICA

Integrali generalizzati o impropri.

Probability integral: Solo enunciato.

Funzione Gamma: Solo enunciati. Le dimostrazioni sono facoltative.

Esempio del tiro al bersaglio e distribuzione normale.

L'istogramma (dove sull'asse x si mettono le classi e sull'asse y si mettono le frequenze relative), "all'infinito", "diventa" una curva a campana dove ci sono due parametri: la media o valor medio (che corrisponde al valore massimo della frequenza relativa (che diventa la funzione DENSITA' DI PROBABILITA') e corrisponde all'asse di simmetria della stessa campana, vedi l'ultima parte di "Parte 3, testo adottato" e i relativi disegni). Notiamo che l'integrale da – infinito a + infinito della funzione DENSITA' DI PROBABILITA' è 1, in quanto la somma delle frequenze relative è 1.

RIEPILOGO GENERALE -10-

Parte 4: Calcolo combinatorio:

- Disposizioni semplici e con ripetizioni ed esempi vari
- Combinazioni semplici e con ripetizioni ed esempi vari
- Permutazioni semplici e con ripetizioni, ed anagrammi,
- VEDI SCHEMA!!
- PROBABILITÀ CONDIZIONATA ed indipendenza tra eventi.
- EVENTI INCOMPATIBILI ED EVENTI INDIPENDENTI

Applicazioni della probabilità (condizionata) ad esempi concreti, quali l'attendibilità di un test riguardo una malattia e le estrazioni di palline da un'urna con reimbussolamento (cioè rimettendo la pallina estratta nell'urna) e senza reimbussolamento (senza rimettere la pallina nell'urna)

ALBERO: Senza reimbussolamento c'è probabilità condizionata, e il fatto che alla prima estrazione sia uscita una certa pallina INFLUENZA l'andamento della seconda estrazione (quindi c'è DIPENDENZA tra le due estrazioni, perché - per esempio - alla seconda estrazione il numero totale di palline diminuisce di 1)

Probabilità condizionata: per esempio $P(B_2/N_1)$ = la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima pallina estratta è stata nera. Con reimbussolamento: visto che, dopo la 1ª estrazione, la pallina estratta viene rimessa nell'urna, l'andamento della 1ª estrazione non influenza quello della seconda. Quindi c'è indipendenza tra le due estrazioni, e in tal caso, detto in modo semplice, "la probabilità dell'intersezione è uguale al prodotto delle probabilità".

Poi: ELEMENTI DI STATISTICA DESCRITTIVA

Parte 4: elementi di Statistica descrittiva

Media, moda, mediana, frequenza assoluta, relativa e percentuale.

PARTI FACOLTATIVE

Le parti dalla varianza alla retta di regressione comprese (cioè: “Parte 4, Testo adottato”, dalla metà di pag. 5 fino alla 9-ultima riga di pag. 12 e “Parte 4, eserciziario di ispirazione”, pag. 5, 6, 7, 10, 11 e 12) SONO FACOLTATIVE. SONO INVECE IMPORTANTISSIME: Media, moda, mediana, frequenza assoluta, relativa e percentuale.

ALTRE PARTI FACOLTATIVE

“Parte 2, Testo adottato”: le DIMOSTRAZIONI a pagina 85, 86,87,88 sulla positività e crescenza (o decrescenza) della funzione esponenziale (a seconda della base) e dei suoi limiti al tendere di x a + infinito ed a - infinito sono FACOLTATIVE. OVVIAMENTE I RISPETTIVI ENUNCIATI NON SONO FACOLTATIVI, E SI DEVONO SAPERE MOLTO BENE!!

Le pagine 23, 24 e 25 di "Parte 3, Testo adottato" sono FACOLTATIVE. Della funzione Gamma, occorre sapere soltanto che Gamma di n = (n-1)!, che è una generalizzazione del fattoriale, e che la funzione Gamma permette di calcolare il fattoriale di un qualsiasi numero strettamente positivo, anche non intero, per esempio (1/2)! Il resto sulla funzione Gamma è FACOLTATIVO.